MACIERZE LOSOWE
LISTA 7
Macierze Wisharta i rozkład Marchenko-Pastura

1. Badamy asymptotykę macierzy Wisharta i momenty graniczne postaci
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(W_n^k)\right)$$
gdzie $W_n = X_n X_n^T$ oraz $X_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_{i,j})$ przy standardowych założeniach.
   (a) Wyznaczyć momenty postaci
$$\mathbb{E}(X_{i_1,j_1}X_{i_2,j_1}X_{i_2,j_2}X_{i_3,j_2}X_{i_3,j_3}X_{i_1,j_3})$$
   które dają niezerowy wkład do granicy (po uwzględnieniu liczności zbiorów etykiet oraz normalizacji),
   (b) Przyporządkować im odpowiednie pary (G, w), gdzie G jest spójnym grafem dwudzielnym o 4 wierzchołkach (z wyróżnionym korzeniem), a w jest spacerem o długości 6 od korzenia do korzenia.
   (c) Przyporządkować tym grafom odpowiednie drogi Dycka z wagami przypisanymi spadkom nieparzystym.

2. Podać przykład pary (G, w), gdzie G jest grafem spójnym dwudzielnym o 4 wierzchołkach, która nie daje wkładu do momentu rzędu 4 macierzy Wisharta w granicy gdy $n \to \infty$ mimo że spacer odwiedza każdą krawędź 2 razy. Podobnie, podać przykład takiej pary dla grafu spójnego dwudzielnego o 5 wierzchołkach, która nie daje wkładu do momentu rzędu 5 macierzy Wisharta w granicy gdy $n \to \infty$.

3. Korzystając z wyprowadzonej na wykładzie rekurencji na momenty rozkładu Marchenko-Pastura,
   (a) pokazać, że jego funkcja generująca momenty $M(z)$ spełnia równanie
$$M(z) = 1 + zM(z)^2 + (t-1)zM(z)$$
   (b) wyprowadzić wzór na jego transformatę Cauchy'ego
$$G(z) = \frac{z-(t-1)-\sqrt{(z-t_1)(z-t_2)}}{2z}$$
   gdzie $t_1 = t+1-2\sqrt{t}$, $t_2 = t+1+2\sqrt{t}$, przy odpowiednim wyborze gałęzi pierwiastka.

4. Sprawdzić, że emipryczny rozkład spektralny macierzy Wisharta jest (słabo) zbieżny według prawdopodobieństwa do rozkładu Marchenko-Pastura (czyli, że zachodzi twierdzenie analogiczne do Tw. 3 dla macierzy Wignera). W tym celu zauważyć, że także w tym przypadku wariancja dąży do zera, gdy $n \to \infty$.

Romuald Lenczewski